TD langages rationnels et automates

Exercice 1 (Expressions régulières) Décrire aussi simplement que possible les langages définis par les expressions régulières suivantes sur l'alphabet $\{a, b\}$:

1. $a(a|b)^*$
2. $a^*|b^*$
3. $(b|ab)^*(a|\varepsilon)$
4. $(aa|b)^*$
5. $(ab^*a|b)^*$

□

Exercice 2 (Expressions régulières) Donner des expressions régulières caractérisant les langages suivants sur l'alphabet $\{a, b\}$:

1. mots de longueur au plus deux
2. mots de longueur paire
3. mots contenant la séquence *ab* mais pas la séquence *ba*
4. mots contenant au plus l'une des deux séquences *ab* ou *ba*
5. mots contenant la séquence *ab* mais pas la séquence *aa*

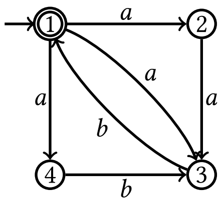
□

Exercice 3 (Automates) Donner de automates reconnaissant les langages suivants :

1. commentaires de la forme `/* ... */` (sans imbrication)
2. nombres en écriture décimale, positifs ou négatifs, avec éventuelle virgule et pouvant faire intervenir la notation scientifique (comme par exemple : `1.02e-5`)

□

Exercice 4 (Déterminisation) On considère l'automate suivant sur l'alphabet $\{a, b\}$.



1. Déterminiser l'automate.
2. Donner une expression régulière décrivant le langage reconnu par l'automate.

□

Exercice 5 (Langages non reconnaissables) On veut montrer que le langage P formé par l'ensemble des palindromes sur l'alphabet $\{ 0, 1 \}$ ne peut pas être décrit par une expression régulière. Pour ceci, on commence le raisonnement suivant : *« Supposons que P peut être décrit par une expression régulière. Alors il est également reconnaissable par un automate fini A. Notons N le nombre d'états de A, et considérons le mot* $m = 0^{N+1}10^{N+1}$. *Le mot m étant un palindrome, il doit donc être reconnu : il existe dans A un chemin acceptant étiqueté par m. »*

1. Montrer que les N premières transitions du chemin acceptant m comportent au moins un cycle.
2. En déduire l'existence d'un mot qui est accepté par A alors qu'il n'est pas un palindrome.
3. Compléter la preuve du fait que P n'est pas reconnaissable.
4. Avec la même technique, démontrer que le langage B formé des mots dont la longueur est une puissance de 2, n'est pas non plus reconnaissable (*ou en utilisant directement le lemme de l'étoile*).

□

Exercice 6 (Construction directe d'un automate déterministe pour une expression régulière) Remarquons que chaque lettre d'un mot m reconnu par une expression régulière e peut être mise en relation avec une des lettres de e. Ainsi par exemple, le mot *aabaab* est reconnu par $(a|b)^*a(a|b)$ de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} a & (\underline{a}|b)^*a(a|b) \\ a & (\underline{a}|b)^*a(a|b) \\ b & (a|\underline{b})^*a(a|b) \\ a & (\underline{a}|b)^*a(a|b) \\ a & (a|b)^*\underline{a}(a|b) \\ b & (a|b)^*a(a|\underline{b}) \end{array}$$

Nous allons distinguer les différentes lettres d'une expression pour faciliter ce suivi. Notre expression régulière devient donc

$$(a_1|b_2)^*a_3(a_4|b_5)$$

On veut alors construire un automate dont les états sont des ensembles de lettres (par exemple : $\{a_1, b_2, a_3\}$). L'état q va reconnaitre les mots dont la première lettre appartient à q (donc dans notre exemple, un a correspondant à a_1 ou a_3, ou un b correspondant à b_2).

Rappelons que l'on dispose déjà d'une fonction $\mathsf{null}(e)$ qui renvoie vrai si l'expression e reconnaît le mode vide ε.

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{null}(\emptyset) & = & \mathsf{false} \\ \mathsf{null}(\varepsilon) & = & \mathsf{true} \\ \mathsf{null}(a) & = & \mathsf{false} \\ \mathsf{null}(e_1e_2) & = & \mathsf{null}(e_1) \wedge \mathsf{null}(e_2) \\ \mathsf{null}(e_1 \mid e_2) & = & \mathsf{null}(e_1) \vee \mathsf{null}(e_2) \\ \mathsf{null}(e^*) & = & \mathsf{true} \end{array}$$

1. Définir deux fonctions first et last renvoyant respectivement l'ensemble des premières lettres et des dernières lettres possibles d'un mot reconnu par une expression régulière. On doit donc avoir

$$\begin{array}{rcl} \mathsf{first}((a_1|b_2)^*a_3(a_4|b_5)) & = & \{a_1, b_2, a_3\} \\ \mathsf{last}((a_1|b_2)^*a_3(a_4|b_5)) & = & \{a_4, b_5\} \end{array}$$

2. Définir une fonction follow qui prend en entrée une lettre a et une expression e, et qui renvoie l'ensemble des lettres qui peuvent suivrent a dans un mot reconnu par e. On doit donc avoir

$$\mathsf{follow}(a_1, (a_1|b_2)^*a_3(a_4|b_5)) = \{a_1, b_2, a_3\}$$

3. On propose alors de construire un automate déterministe pour une expression régulière e en se basant sur les fonctions précédentes, appliquées à l'expression $e\#$ obtenu en ajoutant une lettre spéciale à la fin de e.
Préciser ce que seront l'état initial, les états acceptants, et les transitions. Appliquer cette construction à notre exemple $(a_1|b_2)^*a_3(a_4|b_5)\#$.
Indication. L'état initial doit être $\{a_1, b_2, a_3\}$, et il en part les deux transitions
$(\{a_1, b_2, a_3\}, a, \{a_1, b_2, a_3, a_4, b_5\})$ et $(\{a_1, b_2, a_3\}, b, \{a_1, b_2, a_3\})$.

Remarque : et ça se code en caml. □